Keplers love og Epicykler

Jacob Nielsen[1]

Keplers love

Johannes Kepler (1571-1630) blev i år 1600 elev hos Tyge Brahe (1546-1601) i Pragh, og ved sidstnævntes død i 1601 kejserlig astronom. Kepler stiftede således bekendtskab med Tyge Brahes observationsdata, der på den tid var enestående med hensyn til nøjagtighed og omfang. Gennem studier af specielt Brahes observationer af Mars´ bane viste Kepler ad induktiv vej tre love om planeternes bevægelse om solen. Kepler sad møjsommeligt og prøvede, at finde en matematisk sammenhæng i de enorme mængder af observationsdata. Det tog otte års møjsommeligt arbejde, at komme frem til de første to love.

Først i kraft af Newtons (1642-1727) arbejde offentliggjort i "Principia" 1687 kunne Keplers love udledes deduktivt; det vil sige ud fra mere grundlæggende love alene ved hjælp af matematik og logik.

Kepler opstillede for øvrigt i 1604 principperne for fremstilling af en kikkert ved hjælp af to samlelinser. I 1608 behandledes i Haag en patentansøgning, omhandlende en kikkert fra to nederlandske brillemagere Lippershey og van Alkmaar. Galilei hørte rygtet herom i 1609, og i 1610 opdagede han ved hjælp af en kikkeert af eget fabrikat måner omkring Jupiter. Galilei sluttede, at jorden måtte udføre en lignende bevægelse om solen. Det vidste Kepler altså allerede, men han gik mere stille med dørene end Galilei, der som bekendt kom i konflikt med kirken, fordi han argumenterede for det heliocentriske verdensbillede.

Nicolaus Kopernikus (1473-1543) lægger, på grund af sine tanker offentliggjort 1543 i "De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri", navn til "Den Kopernikanske Revolution", det vil sige det heliocentriske verdensbilledes sejr over det geocentriske. Der var ikke tale om nogen revolution, i betydningen: pludselig voldsom omvæltning, og nådestødet fik det geocentriske verdensbillede først i kraft af Keplers og Galileis arbejde, hvor Kopernikus´ ideer blev eksperimentelt bekræftet. Fra dette tidspunkt måtte det virke stærkt utroværdigt på oplyste mennesker, at tale for et geocentrisk verdensbillede. Her er samspillet mellem Galileis grundlæggelse af den naturvidenskabelige metode og de øvrige intellektuelle strømninger i renæssancen naturligvis centralt.

Keplers første lov (1609)

Planeterne bevæger sig i ellipsebaner med solen i det ene brændpunkt.

Keplers anden lov (1609)

Forbindelseslinjen mellem solen og planeten overstryger i lige store tidsrum lige store arealer.

Keplers tredje lov (1618)

Idet planetens omløbstid betegnes T og den halve storakse a gælder der:

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

k er en konstant, der kun afhænger af centrallegemets masse.

[1] Datadrev\Astronomi\Kepler og Epicykler170310.wpd

Definition af ellipen:

Givet to ikke sammenfaldende punkter i planen, F1 og F2. En ellipse er så mængden af punkter, for hvilke summen af afstanden til de to punkter F1 og F2 er lig med en konstant 2a. Vi må kræve, at 2a > dist(F1;F2). F1 og F2 kaldes ellipsens brændpunkter og 2a er storaksens længde[2].

Definitionen hænger sammen med, at man kan tegne en ellipse ved hjælp af to søm og en snor, der er længere end afstanden mellem sømmene. Prøv selv ved lejlighed.

Sætning 1 *ellipsens brændpunkter og akser*

Betragt et koordinatsystem, hvor ellipsens storakse (længde 2a) falder sammen med førsteaksen, og lilleaksen (længde 2b) med andenaksen.

Her vil brændpunkterne have koordinaterne:

F1 = (-a e; 0)   F2 = (a e; 0)

hvor excentriciteten er defineret ved ligningen:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Excentriciteten er således et tal mellem nul og en. Jo større excentriciteten er, jo mere aflang er ellipsen. Hvis du vil vide mere om ellipser kan du for eksempel se i bogen, der er henvist til i fodnote nr.2.

Hvis ellipsen er tegnet ud fra epicykler[3], for eksempel med programmet EPICYKC.fpr, hvor radius i deferent-cirklen er R_{def} og radius af epicyklerne er R_{epi}, så gælder der:

$$a = R_{def} + R_{epi} \qquad b = R_{def} - R_{epi}$$

Sætning 2 *afstand til brændpunkter*

Afstanden mellem to punkter, P = $(x_1; y_1)$ og Q = $(x_2; y_2)$ er givet ved formlen:

$$dist(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Summen af afstanden til brændpunkterne kaldes i programmet f1pf2, og den er givet ved:

$$f_1Pf_2 = \left((x + a \cdot e)^2 + y^2\right)^{1/2} + \left((x - a \cdot e)^2 + y^2\right)^{1/2}$$

Bevægelsen opfylder Keplers første lov, hvis f1pf2 er konstant under planetens bevægelse.

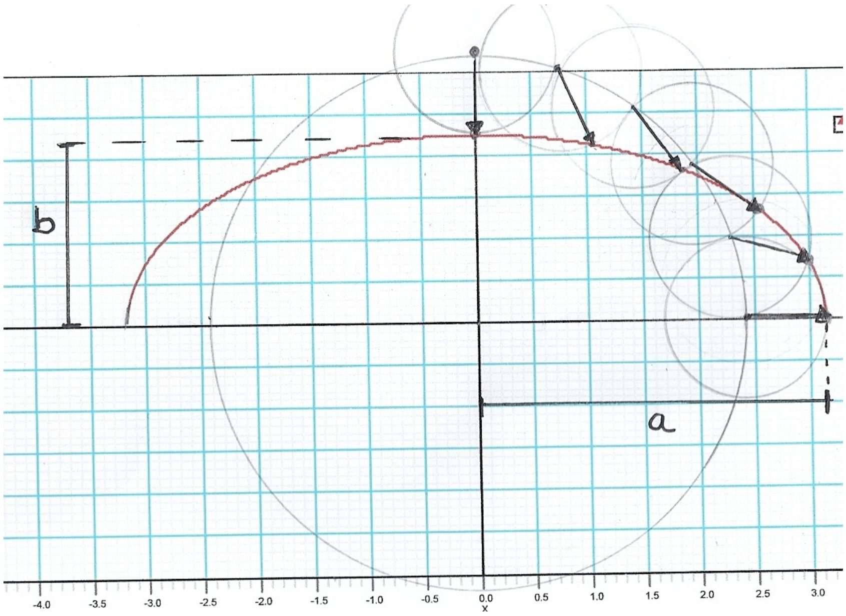
---

[2] Carstensen og Frandsen, "Matematik 3", Systime 1990

[3] Epicykler er beskrevet på side 3.

Epicykler

Ptolemaios levede omkring år 150 i Alexandria. Han beskrev planeternes bevægelse i sit værk Almagest, der var grundlaget for det astronomiske verdensbillede helt frem til Keplers tid. Ptolemaios beskrev planetbanerne ved hjælp af epicykler.



Figuren viser en ellipse, hvor den halve storakse er a og den halve lilleakse er b. Den store cirkel - deferentcirklen - har centrum i origo og radius R_{def}*. De små cirkler - epicyklerne har centrum på den store cirkel og radius* R_{epi}*.*

$$R_{def} = \frac{a+b}{2} \qquad R_{epi} = \frac{a-b}{2}$$

Pilene forbinder centrum for de små cirkler og skæringspunktet mellem cirklen og ellipsen. Herved fremkommer et lille "ur", hvor viseren bevæger sig fra klokken tre til klokken seks, når urets centrum bevæger sig fra klokken tre på det store ur til klokken tolv. Det store ur har altså retrograd bevægelse.

Epicykelmodellen var en ren matematisk model ligesom Keplers ellipsemodel. En fysisk model får vi først i Newtons (1643-1727) "Principia" fra 1687. Her forklares planeternes bevægelse ud fra et dybere princip nemlig gravitationsloven (tyngdekraften).

Opgave 1.

Konstruer ved hjælp af små og store ure - epicykler, en ellipse med a = 12 og b = 8.

Efterprøvning af første lov.

Opgave 2 *epicykler og Kepler I*

a)
Tegn en ellipse ved hjælp af FPRO programmet EPICYKC.fpr - eller et lignende program. Programlinjerne er iøvrigt vedlagt i **bilag 1.**

b)
Aflæs koordinaterne til en række punkter på ellipsen. Programmet har et værktøj til aflæsning af koordinaterne af et punkt.

c)
Beregn for hvert af punkterne summen af afstandene til de to brændpunkter. Drag en konklusion..

Efterprøvning af anden lov.

Sætning 3 *trekants areal*

Med kendskab til vektorregning kan man forholdsvis enkelt beregne en trekants areal ud fra koordinaterne til trekantens hjørner. Her gives formlen uden bevis.

Koordinaterne til trekantens hjørner betegnes som følger: $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ hhv. $(x_3 ; y_3)$.

Arealet af trekanten, der udspændes af de tre punkter, bliver:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \right|$$

Opgave 3 *epicykler og Kepler II*

a)
Brug arealsætningen ovenfor til beregning af arealet af en trekant, hvor du også kan beregne arealet med en anden metode. Du skulle så gerne få samme resultat med de to metoder.

b)
Aflæs koordinaterne til en række punkterpar på ellipsen. Hvert par kan f.eks. have en tidsforskel mellem parrets punkter på 10 dage, hvis omløbstiden er 365,25 dage. Det vigtige er, at tidsforskellen er den samme for alle punkter. Keplers lov siger jo så, at det overstrøgne areal svarende til alle punktpar bliver det samme.

c)
Beregn arealet af trekanterne, der hver især er defineret ved et punktpar og et brændpunkt.

Bilag 1 EPICYKC.fpr

FPRO-programmet EPICYKC.fpr

KLAR

```
{Bevægelse med en epicykel    FIL: epicykC.fpr     Ni}

{ Programmet tegner banekurven samt en epicykel }

{ Tdef er omløbstiden på deferentcirklen - positiv mod uret, Tepi er omløbstiden på epicyklen }
{ Ellipser fremkommer, når Tdef og Tepi er numerisk lige store, og har hvert sit fortegn  }

Tdef := -365.25    { dage }
Tepi := 365.25    { dage }

Fdef := 1/Tdef
Fepi := 1/Tepi

{ Rdef er radius af deferentcirklen }

Rdef := 1
Repi := 0.5

t   := 0        { dage }
dt   := 0.1      { dage }


x   := 0
y   := 0

{ Fase er faseforskellen mellem de to cirkelbevægelser }

Fase := 0
```

LØKKE

```
x := Rdef*cos(Fdef*2*PI*t) + Repi*cos(Fepi*2*PI*t + Fase)

y := Rdef*sin(Fdef*2*PI*t) + Repi*sin(Fepi*2*PI*t + Fase)



t := t + dt
```